**1. Now, that you have discussed, if the formula is true
2. The formula F - A + S = 2, I am going to prove it.
3. That formula is called the Euler characteristic.
4. named after the mathematician Leonard Euler.
5. We are going to prove it by induction.
6. Instead of showing every detail,
7. I will show the formula with several drawings
8. and you will see the idea of the prove.
9. In this prove by induction
10. one first needs to show that the property, we want to show
11. (so the property that for any planar graph we have S - A + F = 2)
12. is true for the base case.
13. In our case, the base case is the case, where there is no edge.
14. The case without edges equals the graph with only one vertex
15. (here you have one vertex)
16. This is a valid graph: it is connected.
17. because you do not need to do anything to walk from that point to that point.
18. and you see there are no edges crossing each other
19. because there are no edges at all.
20. Note that for this graph there is one vertex ( so S=1), no edge (so A =0)
21. and one area, which is the outer face (so A =0)
22. And if you calculate , S-A+F = 1-0+1=2
23. So, Eulers characteristic is true in this case.
24. This is the end of the base case of our induction.
25. Let us proceed to the induction step.
26. It consists in assuming that the property, we want to show,
27. is true for a certain A. The property we want to show
28 is the Euler characteristic (S-A+F=2) and we assume that
29 this Euler characteristic is valid for graphs with at least 12 edges
30 Now,
31 let us assume that we have a graph with 13 edges
32 Here, if you count the number of the edges, you will obtain 13.
33 So, how are we going to show, that the Euler characteristic is valid for this graph?
34 I simply remove this edge
35 Shot do we obtain as a graph? The graph we get is this one.
36. You can easily see that we get a graph with 12 edges.
37. Here, A' = A-1. We hat A = 13, so A'=12.
38. What was the effect of the edge's removal?
39. You can see that the number of vertices has not changed; we have not removed any vertex
40. so, S' is equal to the initial number of vertices, i. e. S'=S
41. But now, you can see that the number of faces has changed!
42. Here, you can see, that the initial edge was between two faces.
43. Here, there was a face at the one side of the edge and there was another one
44. So, there were to distinct faces
45. Now, these two faces are united to a single face.
46. So, as you can see, we have reduced the number of faces by one.
47. I.e. F' = F -1
48. You know that, by assumption, and noting that A' = A-1,
49. you have shown the Euler characteristic for all graphs that have at most 12 edges
50. So you know that (S'-A'+F') equals 2, by the Euler characteristic
51.But now, using this
52. you can also express S'-A'+F' as a function of S, A and F.
53. which are the numbers of our initial graph's vertices, edges and faces.
54. You can see, that S'-A'+F' = S-A+F (you can see that the -1 vanish)
55. So, we have S-A+F=2 and you do not even need
56. to calculate S-A+F by counting, but it is enough to know that
57. it is true for this graph here, to deduce that it is true for tat graph there.
58. There, we have considered one possibility: we have removed an edge.
59. But this is not the only possibility that can occur, because for instance
60. if you remove this edge over here, what is going to happen?
61. Well, you get this graph here
62. which is disconnected.
63. This means, that you can separate the two parts
64 and you can say that here
65. you have a graph with S1 vertices, A1 edges and F1 faces.
66. and here you have another graph with S2 vertices, A2 edges and F2 faces.
67. Now, what we can see is that
68. we can express S, A and F as a function of S1, S2, A1, A2, F1 and F2.
69. First, consider S. S equals what?
70. Recall, that S is the number of vertices in the initial graph
71. before removing this edge.
72. Now you can see that S has not changed: we have not change the total number of vertices.
73. Thus, S is equal to the number of vertices in this graph, so S1
74 plus the number of vertices in this graph here, which is S2.
75. So S= S1+S2
76. Now consider the number of edges.
77. You know, that we got these two graphs by removing an edge.
78. Hence, it means that A equals this number of edges
79. plus this number of edges plus 1, because we initially had this edge too.
80. So, it equals A1+A2+1.
81. Finally, F, the number of faces.
82. W have not changed the number of faces neither inside this graph here.
83. nor inside that graph there.
84. Otherwise, you see that now, here, we have an outer face
85 and here another one
86. This means, that if you count F1+F2,
87. you will get the initial graph's number of faces plus 1.,
88. because, we count the outer face twice now.
89. F = F1+F2 - 1
90.Very good, let us calculate S-A+F.
91 .S-A+F= S1-A1+F1 + S2-A2+F2 -1-1.
92. These two will make -2.
93. Now, we know, that the Euler characteristic
94 has been proved for graphs with a smaller number of faces than A.
95. So, for this graph, with A1 faces,
96. we know that the Euler characteristic is true, so S1-A1+F1 equals 2.
97. Similarly, we know that the Euler characteristic is true for this graph,
98. so, we know that S2-A2+F2 equals 2
99. That's it.
100. Finally, we have that S-A+F =2.
101. That's it. Thank you for watching this video!
102. Today, we proved the Euler characteristic for planar graphs.
103. You might want to know that similar formulas exist for non-planar graphs.
104. (those are graphs where crossing edges are allowed)
105. This relation is really universal
106. and that's why I think it is beautiful.
107. Researchers that do combinatorics
108. often use it to classify graphs they are working with.
109. Thank you for following this video, see you soon!**

**La relation d’Euler Preuve - sous-titres**

1

00:00:28,000 --> 00:00:33,800

Maintenant que vous avez discuté un peu de

savoir comment cette relation est vraie,

2

00:00:33,900 --> 00:00:41,000

cette relation F-A+S=2,

je vous propose de la montrer.

3

00:00:42,000 --> 00:00:45,000

Cette relation s'appelle

la relation d'Euler,

4

00:00:45,500 --> 00:00:49,000

d'après le mathématicien Leonhard Euler ;

5

00:00:49,500 --> 00:00:52,900

et donc on va prouver cette formule par

récurrence.

6

00:00:53,000 --> 00:00:56,900

Au lieu de vous montrer en détail ce

qu'est le raisonnement par récurrence,

7

00:00:57,000 --> 00:01:01,500

je vous propose de montrer cette formule

avec des dessins

8

00:01:01,600 --> 00:01:05,000

et vous verrez le raisonnement par

récurrence un peu sortir.

9

00:01:08,000 --> 00:01:09,900

Dans le raisonnement par récurrence,

10

00:01:10,000 --> 00:01:14,900

il faut d'abord montrer que la propriété

qu'on souhaite démontrer

11

00:01:15,000 --> 00:01:26,000

(donc notre propriété va être que S-A+F=2

pour n'importe quel graphe planaire),

12

00:01:27,000 --> 00:01:30,000

est vraie dans le cas initial.

13

00:01:30,800 --> 00:01:33,900

Et dans notre cas, le cas initial est

le cas où il y a zéro arête.

14

00:01:34,000 --> 00:01:38,900

Le cas avec zéro arête correspond au

graphe où il n'y a que un sommet

15

00:01:39,000 --> 00:01:40,500

(ici vous avez un sommet).

16

00:01:40,600 --> 00:01:44,000

C'est un graphe complètement autorisé :

il est connecté,

17

00:01:44,100 --> 00:01:49,000

puisque pour aller de ce sommet à

ce sommet, il n'y a rien besoin de faire ;

18

00:01:49,100 --> 00:01:51,500

et vous voyez qu'il n'y a pas d'arêtes

qui se croisent,

19

00:01:51,600 --> 00:01:54,000

puisqu'il n'y a tout simplement

pas d'arête.

20

00:01:56,000 --> 00:02:03,000

On vérifie que pour ce graphe, il y a un

sommet (donc S=1), zéro arête (donc A=0),

21

00:02:03,100 --> 00:02:07,000

et une face, qui est la face extérieure

(donc F=1).

22

00:02:07,100 --> 00:02:14,900

Et si vous faites le calcul,

S-A+F = 1-0+1 = 2.

23

00:02:15,000 --> 00:02:18,000

Donc la relation d'Euler est vraie pour ce

cas-ci.

24

00:02:18,100 --> 00:02:22,000

Ceci est le cas initial, et c'est la fin

de l'initialisation de la récurrence.

25

00:02:23,000 --> 00:02:25,900

Passons maintenant à

l'étape de récurrence.

26

00:02:26,000 --> 00:02:28,900

Cela consiste à supposer que la propriété

qu'on souhaite montrer

27

00:02:29,000 --> 00:02:33,400

est vraie pour un certain A.

La propriété qu'on souhaite montrer

28

00:02:33,500 --> 00:02:38,100

est la relation d'Euler (S-A+F=2),

et supposons que

29

00:02:38,150 --> 00:02:42,900

cette relation d'Euler est vraie pour tous

les graphes qui ont moins de 12 arêtes,

30

00:02:43,000 --> 00:02:45,400

donc qui ont 12 arêtes ou moins.

Et maintenant,

31

00:02:45,450 --> 00:02:47,900

supposons qu'on a un graphe avec 13 arêtes.

32

00:02:48,000 --> 00:02:51,000

Ici, si vous comptez le nombre d'arêtes,

il y a 13 arêtes.

33

00:02:52,000 --> 00:02:55,900

Alors comment va-t-on montrer que ce graphe

satisfait la relation d'Euler ?

34

00:02:56,000 --> 00:03:01,000

Je vous propose tout simplement d'effacer

cette arête.

35

00:03:02,000 --> 00:03:07,000

Qu'est-ce qu'on obtient comme graphe ?

Le graphe qu'on obtient est celui-ci.

36

00:03:08,000 --> 00:03:12,000

Vous voyez qu'on obtient un nouveau graphe,

qui a maintenant 12 arêtes.

37

00:03:12,500 --> 00:03:25,000

Ici, A'=A-1.

Ici, on avait A=13, donc A'=12.

38

00:03:25,500 --> 00:03:29,000

Quel a été l'effet de l'effacement de cette

arête ?

39

00:03:30,500 --> 00:03:34,400

On voit bien que le nombre de sommets n'a

pas bougé : on n'a effacé aucun sommet,

40

00:03:34,500 --> 00:03:41,000

donc S' est tout simplement égal au nombre

de sommets initial, donc S'=S.

41

00:03:44,500 --> 00:03:49,000

Mais maintenant, vous voyez que le nombre

de faces a changé !

42

00:03:50,000 --> 00:03:55,000

Ici, vous voyez que l'arête initiale était

entre deux faces.

43

00:03:55,500 --> 00:04:02,000

Ici, il y avait une face d'un côté de

l'arête, et il y en avait une autre.

44

00:04:02,200 --> 00:04:05,000

Donc c'étaient deux faces distinctes.

45

00:04:05,100 --> 00:04:12,000

Or, ici, ces deux faces sont réunies et

n'en forment plus qu'une seule.

46

00:04:12,500 --> 00:04:17,400

Donc vous voyez qu'on a diminué le nombre

de faces de un.

47

00:04:17,500 --> 00:04:25,000

Donc F'= F - 1.

48

00:04:26,000 --> 00:04:33,400

Vous savez que, par hypothèse, vu que

A'=A-1 (c'est-à-dire 12 ici),

49

00:04:33,500 --> 00:04:40,000

vous avez montré la relation d'Euler pour

tous les graphes qui ont au plus 12 arêtes.

50

00:04:41,000 --> 00:04:47,000

Donc vous savez que ceci (S'-A'+F')

est égal à 2 par la relation d'Euler.

51

00:04:49,500 --> 00:04:51,900

Mais maintenant,

en utilisant ces relations,

52

00:04:52,000 --> 00:04:55,700

vous pouvez aussi exprimer S'-A'+F'

en fonction de S, A et F,

53

00:04:55,800 --> 00:04:59,000

qui sont les nombres de sommets, d'arêtes

et de faces du graphe initial.

54

00:05:00,000 --> 00:05:13,000

Vous voyez que S'-A'+F'=S-A+F (vous voyez

que les -1 se compensent entre eux).

55

00:05:15,000 --> 00:05:20,000

Et donc vous voyez que S-A+F=2 :

vous n'avez même pas eu besoin

56

00:05:20,050 --> 00:05:27,000

de calculer S-A+F en comptant,

mais il vous a suffit de savoir que

57

00:05:27,100 --> 00:05:32,000

c'était vrai pour ce graphe-ci pour déduire

que c'était vrai pour ce graphe-là.

58

00:05:36,000 --> 00:05:40,500

Là, on a fait une des possibilités :

on a effacé cette arête.

59

00:05:40,600 --> 00:05:44,900

Mais ce n'est pas la seule possibilité qui

puisse se produire, parce que par exemple,

60

00:05:45,000 --> 00:05:51,000

si vous effacez cette arête-ci plutôt,

que se passe-t-il si on l'efface ?

61

00:05:51,100 --> 00:05:54,000

Et bien on obtient ce graphe-ci,

62

00:05:54,500 --> 00:05:59,400

et vous voyez qu'on obtient un graphe

qui est déconnecté.

63

00:06:00,000 --> 00:06:04,000

C'est-à-dire que vous pouvez séparer

les deux parties,

64

00:06:04,100 --> 00:06:05,100

et vous pouvez dire que ici,

65

00:06:05,150 --> 00:06:12,900

vous avez un graphe avec

S1 sommets, A1 arêtes, et F1 faces ;

66

00:06:13,000 --> 00:06:19,000

et ici vous avez un autre graphe avec

S2 sommets, A2 arêtes, et F2 faces.

67

00:06:21,000 --> 00:06:22,900

Maintenant, ce que l'on veut,

68

00:06:23,000 --> 00:06:29,900

c'est exprimer S, A et F

en fonction de S1, S2, A1, A2, F1 et F2.

69

00:06:31,000 --> 00:06:38,900

Tout d'abord, S.

S est égal à quoi ?

70

00:06:39,000 --> 00:06:41,900

Je vous rappelle que S est le nombre de

sommets dans le graphe initial,

71

00:06:42,000 --> 00:06:44,900

avant qu'on ait effacé cette arête.

72

00:06:45,500 --> 00:06:50,000

Et bien vous voyez que S n'a pas bougé : on

n'a pas changé le nombre de sommets total.

73

00:06:51,500 --> 00:06:55,000

Ainsi, S est égal au nombre de sommets

dans ce graphe-ci, donc S1,

74

00:06:55,100 --> 00:06:58,500

plus le nombre de sommets

dans ce graphe-ci, donc S2.

75

00:06:59,000 --> 00:07:07,000

Donc S=S1+S2.

76

00:07:09,000 --> 00:07:11,000

Maintenant, pour le nombre d'arêtes.

77

00:07:12,000 --> 00:07:21,000

Vous savez que ces deux graphes-ci

ont été obtenus en effaçant une arête.

78

00:07:21,500 --> 00:07:28,900

Donc ça veut dire que A est égal à

ce nombre d'arêtes

79

00:07:29,000 --> 00:07:34,000

plus ce nombre d'arêtes plus 1,

puisqu'il y avait cette arête en plus.

80

00:07:34,100 --> 00:07:44,000

Donc c'est égal à A1+A2+1.

81

00:07:46,000 --> 00:07:52,000

Et enfin, F, le nombre de faces.

82

00:07:53,500 --> 00:07:58,000

On n'a pas changé le nombre de faces

à l'intérieur dans ce graphe-ci,

83

00:07:58,100 --> 00:08:03,000

ni dans ce graphe-là.

84

00:08:04,000 --> 00:08:08,900

En revanche vous voyez que maintenant ici

on a une face extérieure,

85

00:08:09,000 --> 00:08:13,000

et ici on en a une autre !

86

00:08:13,500 --> 00:08:17,900

Cela veut dire que, si vous comptez F1+F2,

87

00:08:18,000 --> 00:08:22,000

ça va être le nombre de faces

du graphe initial +1,

88

00:08:22,100 --> 00:08:25,000

puisqu'on compte la face extérieure

deux fois maintenant.

89

00:08:26,500 --> 00:08:32,500

F=F1+F2-1.

90

00:08:34,000 --> 00:08:39,500

Très bien, maintenant, calculons S-A+F.

91

00:08:40,000 --> 00:08:59,500

S-A+F= S1-A1+F1 + S2-A2+F2 -1-1.

92

00:09:29,500 --> 00:09:34,000

Ces deux-là, ça va faire -2.

93

00:09:36,000 --> 00:09:38,000

Maintenant, on sait que la relation d'Euler

94

00:09:38,100 --> 00:09:44,500

a été prouvée pour des graphes

avec un plus petit nombre d'arêtes que A.

95

00:09:44,600 --> 00:09:49,000

Donc pour ce graphe-ci par exemple,

avec un nombre d'arêtes A1,

96

00:09:49,100 --> 00:09:58,000

on sait que la relation d'Euler est vraie,

donc on sait que ceci (S1-A1+F1) vaut 2.

97

00:09:58,100 --> 00:10:01,500

De même, ici pour ce graphe,

on sait que la relation d'Euler est vraie,

98

00:10:01,600 --> 00:10:06,000

donc on sait que ceci (S2-A2+F2) vaut 2.

99

00:10:06,100 --> 00:10:17,000

Donc à la fin, on a que

S-A+F = 2+2-2 = 2.

100

00:10:17,100 --> 00:10:19,000

Et voilà !

101

00:10:19,500 --> 00:10:22,000

Voilà ! Merci d'avoir suivi cette vidéo !

102

00:10:22,500 --> 00:10:26,900

On a pu prouver la relation d'Euler

aujourd'hui pour les graphes planaires.

103

00:10:27,000 --> 00:10:32,000

Sachez que des formules similaires existent

aussi pour des graphes non planaires

104

00:10:32,100 --> 00:10:36,900

(ce sont des graphes où l'on peut

autoriser des croisements).

105

00:10:37,000 --> 00:10:40,000

Cette relation d'Euler est vraiment

universelle

106

00:10:40,100 --> 00:10:43,000

et c'est pour ça que je la trouve

très belle.

107

00:10:43,100 --> 00:10:46,000

Les chercheurs et les chercheuses

qui font de la combinatoire

108

00:10:46,100 --> 00:10:52,000

l'utilisent très souvent pour

classer les graphes qu'iels étudient.

109

00:10:53,000 --> 00:10:58,000

Merci beaucoup d'avoir suivi cette vidéo,

et à bientôt !